comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Log2x}{h(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{Log2 - Logx}{x}}{\dfrac{x - Logx}{x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{Log2}{x} - \dfrac{Logx}{x}}{1 - \dfrac{Logx}{x}} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [F(x)-Log2]=0$ signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=Log2$.

4/a- $\forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]; Logt \le 0 \Leftrightarrow \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]; -Logt \ge 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]; t - Logt \ge t \Leftrightarrow \forall t \in \left[\frac{1}{2};1\right]; \frac{1}{t - Logt} \le \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t - Logt} dt \le \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t} dt = Log2$

$\Leftrightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) \le Log2.$

b- Soit la fonction $H(x) = F(x) - Log2$.

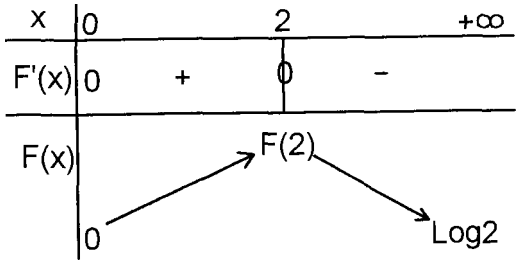
$\begin{cases} H \text{ est continue sur } \left[\frac{1}{2};1\right] & \text{car F est continue sur } \left[\frac{1}{2};1\right] \\ H\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - Log2 \le 0 & \text{d'après } \textbf{II/4/a-} \\ H(1) = F(1) - Log2 \ge 0 & \text{d'après } \textbf{II/3/} \end{cases}$

D'où, d'prés le théorème de valeur intermédiaire, il existe un réel α de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $H(\alpha) = 0$

Signifie qu'il existe un réel α de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $F(\alpha) = Log2$.

5/a- On a : $\forall x$ de $]0;+\infty[$, $F'(x) = \dfrac{Log2 - Logx}{h(2x)h(x)}$

$\Rightarrow Sig(F'(x)) = Sig(Log2 - Logx); \forall x \in]0;+\infty[$

(car on a $\forall t > 0; h(t) \ge 1$)

De cela on peut dresser le tableau de vriation de F